ENS de Lyon  Algèbre 1
L3  2024-2025

# TD 6 : Transposition, orthogonalité, et formes bilinéaires

Les exercices marqués d'un  seront corrigés en TD, si le temps le permet.

Soit $K$ un corps. Sauf mention du contraire, tous les espaces vectoriels considérés seront des $K$-espaces vectoriels.

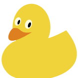
## Exercices importants

**Exercice 1.**

Soit $E$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles convergentes. Pour un entier $n \geqslant 0$, on définit $(e_n : u \mapsto u_n) \in E^*$. On pose enfin $F$ (*resp.* $G$) l'espace engendré par les $e_{2n}$ (*resp.* $e_{2n+1}$) pour $n \geqslant 0$.

**1.** Calculer $(F \cap G)^\top$.

**2.** Montrer que $F^\top + G^\top \neq (F \cap G)^\top$.



**Exercice 2.** (Réduction et transposition)

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie et soit $u \in \mathrm{End}(E)$.

**1.** On pose $\mathrm{coker}(u) := E/\mathrm{Im}(u)$. Montrer que $(\mathrm{coker}(u))^* \cong \ker({}^t u)$.

**2.** **(a)** Soit $F$ un sous-espace vectoriel de $E$. Montrer que $F$ est stable par $u$ si et seulement si $F^\perp$ est stable par ${}^t u \in \mathrm{End}(E^*)$.

**(b)** On prend $K = \mathbb{C}$. Montrer que $u$ admet un hyperplan stable.

**3.** **(a)** Montrer que $P \in K[X]$ annule $u$ si et seulement si $P$ annule ${}^t u$.

**(b)** Montrer que $u$ et ${}^t u$ ont les mêmes polynômes caractéristique et minimal.

**(c)** En déduire que $u$ est diagonalisable (*resp.* trigonalisable) si et seulement si ${}^t u$ est diagonalisable (*resp.* trigonalisable). Exprimer une base de diagonalisation (*resp.* trigonalisation) de ${}^t u$ en fonction d'une telle base pour $u$.

**Exercice 3.** (Décomposition en somme d'applications de rang 1)

Soient $E$ et $F$ des espaces vectoriels de dimension finie et soit $u : E \to F$ une application linéaire.

**1.** Montrer qu'il existe $w_1, \ldots, w_k \in F$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in E^*$ tels que pour tout $x \in E$,

$$u(x) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(x) w_i.$$

**2.** Montrer que l'entier $k$ minimal tel qu'une telle écriture existe est le rang de $u$.

**3.** Soit $(w_1, \ldots, w_r)$ une base de $\mathrm{Im}(u)$. Montrer qu'il existe une unique famille $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ de $E^*$ telle que pour tout $x \in E$, $u(x) = \sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i(x) w_i$.

**4.** Montrer qu'avec ces notations, $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ est une base de l'image de ${}^t u$.

**Exercice 4.**

Soit $\phi$ la forme bilinéaire de $K^2$ définie par

$$\begin{aligned} K^2 \times K^2 &\longrightarrow K \\ \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) &\longmapsto 2x_1y_1 - 3x_1y_2 + x_2y_2 \end{aligned}$$

1. Calculer la matrice $A$ de $\phi$ dans la base $\mathcal{B} = \left(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right)$.
2. Calculer la matrice $A'$ de $\phi$ dans la base $\mathcal{B}' = \left(\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)\right)$.
3. Calculer la matrice de passage $P$ de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et vérifier que $A' = {}^tPAP$.

**Exercice 5.**

Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels (pas forcément de dimension finie). Soit $\phi : E \times F \to K$ une forme bilinéaire. Montrer que $L_\phi$ et $R_\phi$ sont des isomorphismes si et seulement si les dimensions de $E$ et $F$ sont finies et égales et $\phi$ est non dégénérée.

**Exercice 6.**

Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels non nuls de dimension finie, et soit $\phi : E \times F \to K$ une forme bilinéaire.

1. Montrer que $\phi$ est non dégénérée si et seulement si pour toute application linéaire $u \in \mathrm{End}(E)$, il existe une unique application linéaire $u^* \in \mathrm{End}(F)$ telle que pour tout $x \in E$ et $y \in F$,
$$\phi(u(x), y) = \phi(x, u^*(y)).$$
On appelle $u^*$, l'adjoint de $u$.
2. Soit $u \in \mathrm{End}(E)$. Vérifier que pour le crochet de dualité $\langle\ ,\ \rangle : E \times E^* \to K$, l'adjoint de $u$ est ${}^tu$.
3. On suppose $\phi$ non dégénérée. Prouver que
$$\ker(u^*) = \mathrm{Im}(u)^{\perp,\phi}, \quad \mathrm{rg}(u^*) = \mathrm{rg}(u), \quad \text{et } \mathrm{Im}(u^*) = \ker(u)^{\perp,\phi}.$$
4. On suppose $\phi$ non dégénérée. Soit $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de $E$ et $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$ une base de $F$. On note $M$ la matrice de $\phi$ dans les bases $\mathbf{e}$ et $\mathbf{f}$ et $P$ la matrice de $u$ dans la base $\mathbf{e}$. Montrer que la matrice de $u^*$ dans la base $\mathbf{f}$ est égale à $M^{-1t}PM$.

**Exercice 7.**

Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels et soit $\phi : E \times F \to K$ une forme bilinéaire. Soient $V_1$, $V_2$ des sous-espaces vectoriels de $E$.

1. Montrer que $(V_1 + V_2)^{\perp,\phi} = V_1^{\perp,\phi} \cap V_2^{\perp,\phi}$.
2. **(a)** Montrer que $V_1^{\perp,\phi} + V_2^{\perp,\phi} \subset (V_1 \cap V_2)^{\perp,\phi}$.
   **(b)** Montrer qu'il y a égalité si $\phi$ est non-dégénérée.
3. **(a)** Montrer que $V_1 \subset \left(V_1^{\perp,\phi}\right)^{\phi,\perp}$.
   **(b)** Montrer qu'il y a égalité si $\phi$ est non-dégénérée.

**Exercice 8.**

Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels de dimension finie et soit $\phi : E \times F \to K$ une forme bilinéaire.

1. Montrer qu'il existe une unique forme bilinéaire
$$\overline{\phi} : E/\ker(L_\phi) \times F/\ker(R_\phi) \to K$$
telle que pour tout $x \in E$, $y \in F$, $\overline{\phi}(\overline{x}, \overline{y}) = \phi(x, y)$.
2. Montrer que $\overline{\phi}$ est non dégénérée.

# Exercices supplémentaires

**Exercice 9.**

1. Soit
$$E_0 \xrightarrow{f_0} E_1 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_{n-2}} E_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} E_n$$
une suite exacte d'espaces vectoriels. On rappelle que cela signifie que pour tout $i$, $E_i$ est un espace vectoriel, $f_i : E_i \to E_{i+1}$ est une application linéaire et
$$\ker(f_i) = \mathrm{Im}(f_{i-1}).$$
Montrer que la suite duale
$$E_n^* \xrightarrow{{}^t f_{n-1}} E_{n-1}^* \xrightarrow{{}^t f_{n-2}} \cdots \xrightarrow{{}^t f_1} E_1^* \xrightarrow{{}^t f_0} E_0^*$$
est exacte.

2. Soient $E$, $F$ deux espaces vectoriels, et soit $u : E \to F$ une application linéaire. Retrouver en utilisant des suites exactes les isomorphismes
$$\ker({}^t u) \cong \mathrm{coker}(u)^* \quad \text{et} \quad \mathrm{coker}({}^t u) \cong \ker(u)^*.$$

**Exercice 10.**

Dans cet exercice, on ne suppose pas que $K$ est de caractéristique différente de 2. Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie, et soit $\phi$ une forme bilinéaire sur $E$ telle que pour tout $x$, $y \in E$ :
$$\phi(x, y) = 0 \iff \phi(y, x) = 0.$$

1. On suppose tout d'abord que $\phi$ est non dégénérée.
   (a) Montrer que pour tout $x \in E$, il existe $\lambda_x \in K$ tel que $L_\phi(x) = \lambda_x R_\phi(x)$.
   (b) En déduire qu'il existe $\lambda \in K$ tel que $L_\phi = \lambda R_\phi$.
   (c) Conclure que $\phi$ est symétrique ou alternée.
2. Démontrer que la conclusion est toujours vérifiée si $\phi$ est dégénérée.

**Exercice 11.** (Forme bilinéaire antisymétrique)

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie sur $K$, avec $K$ un corps de caractéristique différente de 2. Soit $\phi : E \times E \longrightarrow K$ une forme bilinéaire antisymétrique.

1. Montrer que si $\dim E = 1$, alors $\phi = 0$.
2. Supposons $\dim E \geqslant 2$ et $\phi \neq 0$. Montrer qu'il existe deux vecteurs indépendants $u_1, u_2 \in E$ tels que
$$\mathrm{Mat}_{(u_1,u_2)}\left(\phi_{|F}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$
où $F = \mathrm{Vect}\,(u_1, u_2)$.
3. Soit $W = F^{\perp,\phi}$. Montrer que $E = F \oplus W$.
4. En déduire qu'il existe une base de $E$ telle que la matrice de $\phi$ soit diagonale par blocs, avec des blocs de 0 et des blocs identiques à ceux de la question 3. *En particulier, toute forme bilinéaire antisymétrique est de rang pair.*